第八周习题课

1. 设在上具有二阶连续导数，且，对函数



（I）确定值使在上连续；

（II）对（I）中确定的值，证明在上的一阶导数连续。

证明（I）。

当时在上连续；

（II）时，，



，

在上的一阶导数连续。

1. 设是以为周期的连续函数，则在任何一个周期内，存在，使得。

证明：令，则为连续函数，且，



，当等号成立时，取；当等号不成立时，有连续函数介值定理可得存在使得，即。

1. 确定的值，使当时，与为同阶无穷小。

【解析】

  ，

当 

即 

便有，

亦即与为同阶无穷小。

1. 若导数连续且，求当时等价无穷小量的阶。

【解析】，

， 

，

故等价无穷小量的阶为2。

1. 求极限

**解：**该极限为“”型，如用洛必达法则，计算是繁琐的。利用的二阶泰勒公式可得到 ，将视为中间变量，

考虑到 ，则有





另外注意到，，则原极限为

。

1. 设在某邻域内可导，且，求极限 

解：考虑极限

由符合极限定理，只需求极限



1. 假设极限，求极限。

解：由熟知极限 可知。于是我们有

。根据已知条件知

。

因此 。解答完毕。

1. 设在上处处可导且。求常数，使得

。(\*)

解：根据假设，以及Lagrange中值定理可知， 等式（\*）右边的极限为 。考虑等式（\*）左边的极限。

若，则等式（\*）左边的极限为1，右边的极限为。等式（\*）不可能成立。因此。我们将函数写作标准极限模式：

，。

由等式（\*）得。因此。

1. 时是比高的无穷小量。

解：



1. 在处带Peano的Taylor公式为 。

【答案】 

【考点】Taylor展开。

【解析】，

。

1. 设，则= 。

【答案】 

【考点】 利用Taylor展开的系数求高阶导数。

【解析】，



中值定理的应用

1. 证明：若，，则存在，使得。

证明：记，则为连续函数，





有连续函数零点存在性可得，则存在，使得，即。

1. 设为连续函数，。证明：

（I）是单调函数；

（II）。

证明：（1）反证法：

假设不是单调函数，则存在。

因为为连续函数，存在使得，而，矛盾。

（2）。

如果，由的单调性，，；

如果，由的单调性，，。

故。

1. 在上，，可微，且，证明在存在唯一的使。

证明：（1）存在性：作辅助函数，



由连续函数的介值定理得，在存在使，即。

（2）唯一性：若存在两点，使，，由Lagrange中值定理，存在（假设），使

，

与条件矛盾。

1. 设，在可导，，求证：存在使。

证明：（1）若，结论显然成立。

（2）若，不恒为零，则一定存在使。不失一般性，假设，由连续函数的介值定理得在中存在一点使。同样，因为，存在，使得。由连续函数的介值定理得在中，存在一点使。由Rolle定理得，存在使

1. 设内可导，且在。证明：。

证明：因为，而

，

所以。记，则，由广义Rolle定理，，即。

1. 设函数在上连续，在内具有二阶导数且存在相等的最大值，，证明：存在，使得。

**证明：**令， 则

，，

设在内的最大值为分别在取得。

当时，取，则有。

当时，则





由介值定理，存在使，即



由Rolle定理，

，，，

再由Rolle定理，，，即



1. 函数在连续，在二阶可导，且，

。 求证

（1），；

（2），使得 。

证明：（1）用反证法，若在内存在使得，

则由Rolle定理，，，使得。

再由Rolle定理可知，，使得。此与题设矛盾。

（2）记，则函数在连续，在可导，

且，由Rolle定理，，使得，

也即 ，由此导出结论（2）。证毕。